CLASE 2. Integrales de Superficie de Funciones Escalares

Consideremos una superficie S, parametrizada mediante una función (de clase $\mathcal{C}^1$ e inyectiva) $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(\mathcal{D}) = S$ y $\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Sea $f\colon S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua definida en S (un campo escalar en S).

Definición 2.1 (Integral de Superficie para Campos Escalares)**.** Se define la integral de superficie de f sobre S, denotada $\displaystyle\iint_S f \, \mathrm{d}s$ o también $\displaystyle\iint_S f(x,y,z) \, \mathrm{d}s$, mediante la integral doble

$$\iint_S f(x,y,z) \, \mathrm{d}s = \iint_{\mathcal{D}} f(\phi(u,v)) \, \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

donde $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es el producto vectorial fundamental (pulse aquí para recordar su significado) asociado a la parametrización ϕ.

Comparando ésta definición con la dada para el área (Definición 1.4), nos damos cuenta de que si f es idénticamente 1 (la función constante que siempre *vale* 1), lo que se obtiene es el área de S. Se pueden dar otras interpretaciones a esta integral. Así, por ejemplo, si f es la función que representa la densidad de masa de la superficie S, se interpreta (la integral) como la masa M de la superficie, es decir,

$$M = \iint_S f(x,y,z) \, \mathrm{d}s.$$

De esta manera las integrales

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \iint_S x f(x,y,z) \, \mathrm{d}s \\ \bar{y} &= \frac{1}{M} \iint_S y f(x,y,z) \, \mathrm{d}s \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \iint_S z f(x,y,z) \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

dan las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centro de masa de la superficie.

***Observación* 2.2** (Integrales sobre superficies del tipo $z = g(x,y)$)**.** Si S corresponde a la gráfica de una función $z = g(x,y)$ (pulse aquí para recordar que tales superficies son superficies parametrizadas), entonces podemos parametrizar a S mediante $x = u$, $y = v$, $z = g(u,v)$, con lo cual se obtiene que

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2} \quad \text{y}$$
$$\iint_S f \, \mathrm{d}s = \iint_{\mathcal{D}} f(u, v, g(u, v)) \sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2} \; \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Además podemos describir la gráfica S como el conjunto solución de la ecuación

$$\varphi(x, y, z) = 0, \text{ siendo } \varphi(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Un vector normal (a S) es $\nabla\phi$, es decir, $\boldsymbol{\eta} = (-g_x\,,\, -g_y\,,\, 1)$. Si la superficie se describe por la ecuación $0 = \psi(x, y, z) = g(x, y) - z$ se tendría que $\nabla\psi = (g_x\,,\, g_y\,,\, -1)$ es otro vector normal a S en dirección opuesta a $\boldsymbol{\eta}$ (en el mismo punto de S).

Ejemplo 2.3. Calcular la masa M de la superficie definida por el paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$ sobre el plano $z = 0$ si la densidad de masa está dada por $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2$.

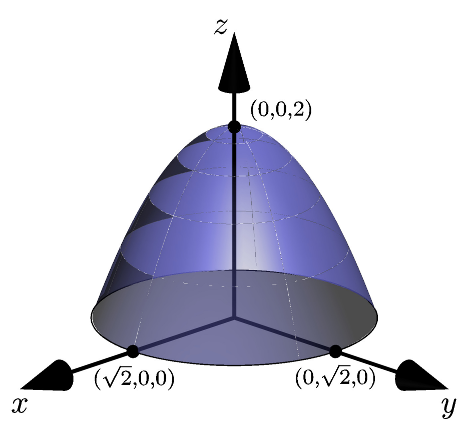

Figura 1: Paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$.

Solución. Parametrizando nuestra superficie mediante $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, tomando como dominio $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 2\}$ (siendo $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$) se obtiene que $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = (2x, 2y, 1)$ y $\|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Luego

$$M = \iint_S \varphi \, \mathrm{d}s = \iint_{\mathcal{D}} \varphi(\phi(x, y)) \, \|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\| \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$
$$= \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) \, \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Con el uso de coordenadas polares, $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$, $\begin{matrix} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$, se obtiene

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+4r^2}\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{149\pi}{30}.$$

***Observación* 2.4.** En la notación de integral (de superficie) de funciones escalares $\left(\int\int_S f\,\mathrm{d}s\right)$ usamos S en lugar de ϕ (ver Definición 2.1), a pesar de que en su definición no se usó a S sino a ϕ. Se hizo así porque, como veremos en la clase siguiente (parte (iii) del Teorema 3.4), la integral de superficie (para campos escalares) es independiente de la parametrización ϕ que se elija.